John D. Barrow

Sto důležitých věcí O UMĚNÍ A MATEMATICE, které nevíte

(a ani nevíte, že je nevíte)

DOKOŘÁN

John D. Barrow

100

Sto důležitých věcí O UMĚNÍ A MATEMATICE, které nevíte

(a ani nevíte, že je nevíte)

Dokořán

John D. Barrow
Sto důležitých věcí o umění a matematice, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte)

Copyright © John D. Barrow 2014
First published as 100 Essential Things You Didn't Know You Didn't Know About Maths and the Arts by Bodley Head, an imprint of The Random House Group Ltd.
John Barrow has asserted his right under the Copyright, Designs and Patents Act 1988 to be identified as the author of this work.
Translation © Jiřina Vítů, Lukáš Georgiev, Jiří Pilucha, 2017

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí být rozmnožována a rozšiřována jakýmkoli způsobem bez předchozího písemného svolení nakladatele.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu 100 Essential Things You Didn't Know You Didn't Know About Maths and the Arts vydaného nakladatelstvím The Bodley Head přeložili Jiřina Vítů, Lukáš Georgiev a Jiří Pilucha.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Marie Černá.
Sazba Karel Horák.
Obálka a konverze do elektronické verze Michal Puhač.
V roce 2017 vydalo nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, 150 00 Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 889. publikaci (259. elektronická).

ISBN 978-80-7363-770-5

Věnováno Darcey a Guyovi, kteří jsou dosud tak mladí,
že vědí všechno

Umění znamená „já“, věda znamená „my“.
Claude Bernard

Obsah

Předmluva _ 11
1. Umění matematiky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 13
2. Kolik hlídačů je potřeba v galerii? _ _ _ _ _ _ _ 16
3. Poměry stran z různých pohledů _ _ _ _ _ _ _ 20
4. Vickreyovy aukce _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 23
5. Falešně dokonalá intonace _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 26
6. Taneční skok „grand jeté“ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 29
7. Na co byste neměli věřit _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 32
8. Xerografie: jedno déjà vu za druhým _ _ _ _ _ 35
9. Za stránky krásnější _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 38
10. Zvuk ticha _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 42
11. Velmi neobvyklý dort _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 45
12. Fyzika horské dráhy _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 48
13. Počátek vesmíru v televizním přenosu _ _ _ _ _ 52
14. Jak se vyrovnat s napětím _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 55
15. Umění jako dynamická stabilita _ _ _ _ _ _ _ 57
16. Kulinářské umění _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 60
17. Obloukové trojúhelníky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 63
18. Dny v týdnu _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 67
19. Zítra je taky den _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 70
20. Diamanty jsou věčné _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 72
21. Pojďte si začmárat! _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 75
22. Proč mají vajíčka vejčitý tvar? _ _ _ _ _ _ _ _ _ 77
23. Efekt „El Greco“ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 80
24. Heuréka _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 83

25. Co oko říká mozku _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 86
26. Proč je vlajka Nepálu jedinečná _ _ _ _ _ _ _ _ 89
27. Indické kouzlo s provazem _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 92
28. Šálivý obraz, který vítězí nad zrakem _ _ _ _ _ 95
29. Ajaj, už je zase pátek třináctého... _ _ _ _ _ _ _ 99
30. Pásové vlysy _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 102
31. Okurka _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 106
32. Zajištěné sázky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 109
33. Nekonečno v divadle _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 111
34. Svítíme podle zlatého řezu _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 113
35. Magické čtverce _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 116
36. Mondrianovy zlaté obdélníky _ _ _ _ _ _ _ _ 120
37. Hrátky s opičí skládačkou _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 123
38. Příjemný zvuk _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 126
39. Nové dlaždice ze starých _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 129
40. Devítistupňové řešení _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 132
41. Rozměry papíru a kniha, která padne do ruky _ 135
42. Černé a červené jednopencovky _ _ _ _ _ _ _ _ 138
43. Prvočísla v hlavní roli _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 143
44. Proč to nejde změřit? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 146
45. Umění mlhovin _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 149
46. Reverzní aukce: zpět k Vánocům _ _ _ _ _ _ _ 153
47. Rituální geometrie pro bohy _ _ _ _ _ _ _ _ _ 156
48. Růžice a větrníky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 160
49. Vodní hudba ve sprše _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 163
50. Porcování obrazů _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 165
51. Triquetra _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 168
52. Padá sníh, pojedeme na saních _ _ _ _ _ _ _ _ 171
53. Nebezpečné obrázky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 174
54. Kloktáme se Sokratem _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 177
55. Podivné vzorce _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 179
56. Styloměřičství: matematika vládne vlnám _ _ _ 183
57. A teď všichni! _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 187

58. Když čas musí počítat s prostorem _ _ _ _ _ _ 189
59. Jak se dívat na televizi _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 192
60. Ladné profily váz _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 194
61. Všechny tapety světa _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 197
62. Umění války _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 200
63. Tříštění sklenic _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 204
64. Kosočtverce nikdy nezklamou _ _ _ _ _ _ _ _ 206
65. Speciální trojúhelníky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 208
66. Také gnómony jsou zlaté _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 210
67. Svět vzhůru nohama podle Scotta Kima _ _ _ _ 212
68. Kolik slov znal Shakespeare? _ _ _ _ _ _ _ _ _ 214
69. Zákon počátečních číslic – podivný i nádherný 218
70. Kdo bude mít při transplantaci přednost _ _ _ 222
71. Eliptické šeptací galerie _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 224
72. Eupalinos tunelář _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 226
73. Kolik člověkodnů obnáší pyramida _ _ _ _ _ _ 230
74. Rozeznej tygra v křovinách _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 233
75. Umění a entropie _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 236
76. Za jasného dne... _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 238
77. Salvador Dalí a čtvrtý rozměr _ _ _ _ _ _ _ _ _ 240
78. Když jeden zvuk stíhá druhý _ _ _ _ _ _ _ _ _ 243
79. Obličeje dle Chernoffa _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 245
80. Muž z podzemky _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 247
81. Möbius a jeho páska _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 250
82. Ach ty zvony! _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 253
83. Stádnost _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 256
84. Počítání na prstech _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 260
85. Hymnus na nekonečno od jiného Newtona _ _ 262
86. Charles Dickens se nenechal zprůměrovat,
Florence Nightingaleová také ne _ _ _ _ _ _ _ 266
87. Markovovy řetězce v literatuře _ _ _ _ _ _ _ _ 269
88. Od svobodné vůle k volbám v Rusku _ _ _ _ _ 273
89. Schovávaná s nejvyšší bytostí _ _ _ _ _ _ _ _ _ 276

90. Kdy se nevyplatí být vševědoucí _ _ _ _ _ _ _ _ 278
91. Praskliny na obrazech _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 279
92. Magická rovnice populární hudby _ _ _ _ _ _ 282
93. Nahodilé umění _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 285
94. Jack odkapávač _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 289
95. Strunový most _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 294
96. Šněrování bot na 490 miliard způsobů _ _ _ _ 298
97. Jak se dívat na sochy _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 302
98. Nekonečný hotel _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 305
99. Barvy hudby _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 308
100. Shakespearovi opičáci: nová generace _ _ _ _ _ 312

Poznámky _ 316

Předmluva

Matematiku lze najít všude kolem nás. Je základem vztahů a situací, u nichž bychom to vůbec nečekali a za „matematické“ je nepovažovali. Právě držíte v rukou sbírku myšlenek a útržkovitých úvah o matematice, zaměřenou na neobvyklé použití matematiky mimo její obvyklé prostředí. Situace jsme tentokrát převzali ze světa „umění“, které zde budeme chápat jako široce pojatý obor zahrnující rozlehlé subkontinenty designu i humanitních věd. Z mnoha možností jsem vybral stovku příkladů. Výběr je vytvořen tak, že knihu lze číst v libovolném pořadí: některé kapitoly volně navazují na jiné, ale většinou jsou samostatné a nabízejí nový pohled na různé aspekty umění – sochařství, návrhy mincí či známek, populární hudbu, strategie při aukcích, výrobu falzifikátů, čmárání po papíru, broušení drahokamů, abstraktní umění, tisk, archeologii, grafickou úpravu středověkých manuskriptů nebo kritiku textů. Nejedná se o tradiční knihu „o matematice a umění“, která by znovu probírala různé symetrie nebo perspektivu, ale o jakési pobídnutí k novému pohledu na okolní svět.

Široké spektrum neočekávaných propojení mezi světem matematiky a světem umění vlastně není žádným překvapením. Na matematiku lze pohlížet jako na katalog všech možných forem či vzorů, což také vysvětluje její užitečnost a univerzalitu. Doufám, že tato sbírka příkladů zaměřených na prostorové a časové formy napomůže k tomu, že lépe oceníte, že i obyčejná matematika dokáže vrhnout zcela nové světlo na leckteré aspekty lidské tvořivosti.

Rád bych poděkoval lidem, kteří mě při psaní této knihy povzbuzovali nebo mi pomáhali se shromažďováním obrazového materiálu a přípravou jeho finální podoby. Zejména bych rád poděkoval Katherine Ailesové, Willu Sulkinovi

a jeho nástupci v nakladatelství Bodley Head. Za přispění jsem vděčný také Richardu Brightovi, Owenu Byrneovi, Pinu Donghimu, Rossu Duffinovi, Ludovicu Einaudimu, Marianne Freibergerové, Geoffreymu Grimmettovi, Tonymu Hooleyovi, Scottu Kimovi, Nicku Meeovi, Jutaku Nišijamovi, Richardu Taylorovi, Rachel Thomasové a Rogeru Walkerovi. Rád bych poděkoval také Elizabeth a dalším členům naší nyní již vícegenerační rodiny, že byli všímaví a tu a tam se o tuto knihu při psaní zajímali. Teď jen doufám, že si povšimnou i toho, že už vyšla.

John D. Barrow
Cambridge

1
Umění matematiky

Proč jsou matematika a umění tak často propojené? S knihami či výstavami zaměřenými například na vztah umění k nauce o tvárnosti materiálů nebo entomologii se hned tak nesetkáme, zatímco umění a matematika bývají na stránkách učených pojednání častými souputníky. Existuje pro to jednoduchý důvod, který lze vystopovat až u samých základů matematiky.

Zatímco historici, inženýři či zeměpisci nebudou mít s osvětlením předmětu svého zájmu žádné potíže, matematici to tak jednoduché nemají. Již dlouhou dobu existují dvě různá pojetí toho, co vlastně matematika *je*. Podle jednoho pojetí matematické vztahy objevujeme či odkrýváme, zatímco podle druhého si je vymýšlíme a konstruujeme. Podle prvního názoru je matematika jakýmsi souborem věčně pravdivých tvrzení, která v určitém reálném smyslu již „existují" a matematici je postupně nalézají. Toto pojetí se někdy označuje jako matematický platonismus. Druhé, protikladné pojetí pohlíží na matematiku jako na nekonečně rozmanitou hru, podobnou například šachům, u níž si vymýšlíme pravidla a poté vyvozujeme důsledky, které z nich vyplynou. Pravidla často stanovujeme podle toho, co vidíme v přírodě kolem sebe, anebo s cílem usnadnit si řešení nějakého praktického problému. V každém případě toto pojetí předpokládá, že matematika je pouze rozpracováním těchto souborů pravidel: nemá vlastní

smysl, existují pouze její možná použití. Je lidským vynálezem.

Tyto dva alternativní filozofické pohledy, totiž odkrývání nebo vytváření, necharakterizují jen matematiku. Jde o dva pohledy, které lze zpětně vystopovat až k dávnému počátku filozofického myšlení ve starověkém Řecku. Naprosto stejně lze přistupovat i k hudbě, umění nebo fyzikálním zákonům.

Zvláštní na matematice je to, že téměř všichni matematici se chovají jako platonici, tedy že hledají a nalézají různé skutečnosti v myšlenkově přístupném světě matematických pravdivých tvrzení, ale pokud bychom se jich zeptali na nejzazší povahu matematiky, tohoto pohledu na ni by se zastala jen malá hrstka z nich.

Celá situace je ještě složitější kvůli těm, kdo zpochybňují ostrou hranici mezi uvedenými dvěma pojetími (jako například já). Přece jen, i kdyby nakrásně určitá část matematického světa byla pouze nalezena a odkryta, proč by nebylo možné s její pomocí začít vytvářet další matematické skutečnosti? Proč je nutné, aby vše, co nazýváme matematikou, bylo *buď* nalezené, *nebo* zkonstruované?

Existuje i jiný pohled na matematiku, který je v určitém smyslu slabší, zejména v tom, že do její definice zahrnuje například i pletení nebo hudbu. To je však podle mého názoru užitečnější pro nematematiky. Tento pohled také objasňuje, proč nám matematika připadá tak šikovná k chápání fyzického světa. V tomto třetím pojetí je matematika jakýmsi katalogem všech možných forem či vzorů. Tento katalog je nekonečný. Některé z těchto vzorů umožňují členit prostor a slouží k dekoraci našich podlah či stěn; jiné mají podobu časových sekvencí, různých symetrií nebo logických vztahů či forem příčiny a následku. Některé nám připadají atraktivní a zajímavé, jiné nikoli. Ty první máme tendenci zkoumat do hloubky, zatímco ty druhé nás příliš nelákají.

Praktická užitečnost matematiky, která tolik lidí překvapuje, není z tohoto pohledu žádným mysteriem. Určité vzorce či obrazce musejí ve vesmíru existovat, jinak by nemohla existovat ani žádná forma života nadaného vědomím. A matematika je pouze nástrojem k jejich studiu. Proto se také zdá, že tak všudypřítomně prostupuje veškerým naším zkoumáním přírodního světa. Ale určité mysterium tu přece jen zůstává: jak je možné, že tak malý počet jednoduchých vzorů a forem dokáže vypovídat tak mnoho o struktuře vesmíru a všeho, co v něm existuje? Můžeme si také povšimnout, že matematika je pozoruhodně účinným nástrojem v přímočarých přírodních vědách, avšak překvapivě je neúčinná, pokud jde o pochopení problematiky mnoha komplexních věd zaměřených na lidské chování.

Tento pohled na matematiku jako na soubor všech možných vzorů a forem také ukazuje, proč jsou matematika a umění tak často provázány. V uměleckých dílech lze vždy rozpoznat nějaké formy. V sochařství se pracuje s prostorovými formami, v dramatické tvorbě půjde navíc o formy uchopení času. Všechny tyto formy lze popisovat jazykem matematiky. I přes tuto možnost ale neexistuje žádná záruka, že matematický popis bude zajímavý a účelný v tom smyslu, že přispěje k získání nových forem nebo že nás dovede k hlubšímu porozumění. Lidské emoce můžeme označit čísly nebo písmeny a můžeme si také vytvořit jejich soupis, ale to ani v nejmenším neznamená, že se budou řídit stejnými pravidly a vzorci jako čísla nebo gramatika. Naopak jiné, subtilnější vzory a formy, jako například hudební formy, do strukturálního pojetí matematiky zcela jasně spadají. To ale neznamená, že účelem či smyslem hudby je matematika samotná, ale pouze to, že symetrie a formy, s nimiž se pracuje v hudbě, jsou jen malým zlomkem z obrovského katalogu možností, které se matematika snaží zkoumat.

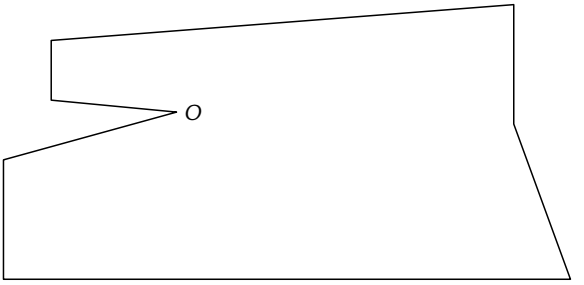
2

Kolik hlídačů je potřeba v galerii?

Představte si, že jste šéfem ochranky v umělecké galerii, kde na všech stěnách visí vzácné obrazy. Visí dost nízko, aby je návštěvníci měli přímo před očima, a tak jsou současně dobře dostupné zlodějům a vandalům. Galerie se skládá z řady místností různých tvarů a půdorysných rozměrů. Jak zajistíte, aby byl každý obraz neustále pod dohledem? Máte-li neomezený rozpočet, je řešení snadné: postavíte ke každému obrazu jednoho hlídače. Umělecké galerie se však jen zřídkakdy topí v penězích a mecenášům se nebude chtít přispívat na platy pro davy hlídačů. Musíte proto vyřešit následující úlohu: jaký nejmenší počet strážců najmout a jak je rozmístit, aby všechny stěny galerie ve výšce očí byly stále pod dohledem?

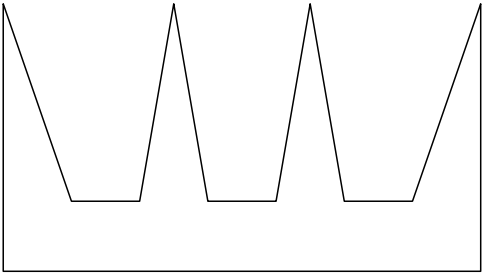
Potřebujeme tedy zjistit nejmenší počet hlídačů (nebo kamer) potřebných k pozorování všech stěn, přičemž předpokládáme, že stěny jsou rovné, že hlídač na rohu v místě dotyku dvou stěn má dobrý výhled na obě z nich, že mu v rozhledu nebrání žádná překážka a že jeho zorný úhel je 360°. Výstavní síň o trojúhelníkovém půdorysu může očividně uhlídat jediný strážce, a totéž platí obecněji pro libovolný vypouklý (konvexní) mnohoúhelník s rovnými stěnami.

Vše začíná být zajímavější, pokud jsou některé ze stěn zalomené dovnitř. Na obrázku vidíme jednu takovou síň o osmi stěnách. Tu také uhlídá jediná osoba, pokud ovšem



stojí v bodě O (celkový přehled ztratí ve chvíli, kdy přejde do levého horního nebo dolního rohu).

Tato galerie se tedy provozuje celkem lacino. Ale podívejte se na jinou, dvanáctistěnnou síň s poněkud výstřednějším půdorysem, s níž už začíná být problém. Mají-li mít hlídači na očích všechny stěny, budou muset být čtyři:

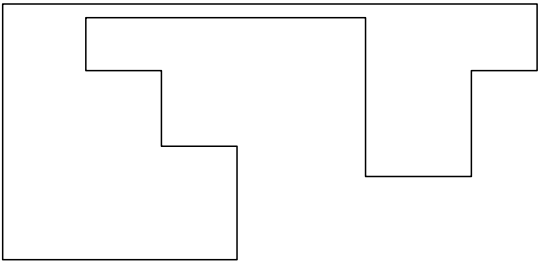


Zkusme teď úlohu řešit nějak obecně. Rozhodující je síň rozdělit na vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky.[1] To jde vždycky. Ježto je trojúhelník jeden z oněch konvexních útvarů, pro které stačí jediný hlídač, vidíme, že lze-li síň úplně pokrýt T trojúhelníky, uhlídá ji T osob. Může jich ale stačit i méně. Například čtvercovou místnost lze úhlopříčkou rozdělit na dva trojúhelníky, ale dva hlídači nejsou nutní, stačí jeden. Obecně bude maximální počet osob k ohlídání místnosti o W stěnách roven celé části[2] čísla $W/3$. U naší

dvanáctistěnné hřebenovité síně to dělá 12/3 = 4, kdežto u osmistěnné to jsou 2.

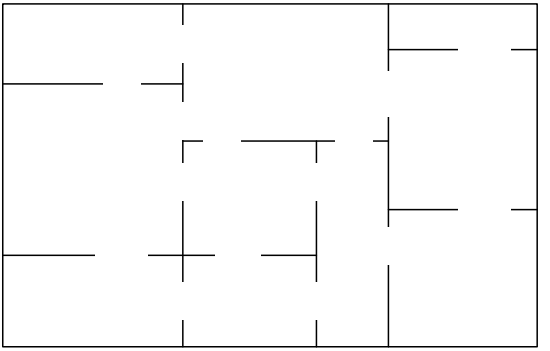
Bohužel rozhodnout, zda skutečně potřebujete tento maximální počet hlídačů, nebo zda v daném případě vystačíte i s menším počtem, není zrovna snadné. Jedná se o výpočetně náročnou úlohu, kdy se počítačový čas potřebný pro řešení může přidáním každé další stěny zdvojnásobovat.[3] V praxi to dnes však může způsobovat potíže pouze v případě, že *W* je velmi velké číslo.

Většina galerií, které v současnosti můžete navštívit, nemá na rozdíl od výše uváděných případů klikatě rozeklaný půdorys. Všechny rohy v nich budou pravoúhlé, jako na následujícím obrázku:



Máme-li pravoúhlou výstavní síň s mnoha kouty a rohy jako na obrázku, lze ji půdorysně rozdělit na obdélníkové sektory, z nichž každý může hlídat jen jedna osoba.[4] Platí, že v každé pravoúhlé mnohostěnné síni bude počet hlídačů, kteří určitě zvládnou svůj úkol, roven celé části čísla 1/4 × (počet koutů a rohů). U vyobrazené síně se 14 kouty a rohy je výsledek 3. Znamená to, že z hlediska výdajů je mnohem hospodárnější mít galerii tohoto tvaru, přičemž výhoda pravoúhelníkového uspořádání se zvyšuje s počtem stěn. Je-li v místnosti 150 stěn, může nepravoúhlé provedení vyžadovat až 50 strážců, kdežto pravoúhlé nejvýš 37.

Jiným obvyklým uspořádáním pravoúhlých galerií je prostor rozdělený na jednotlivé místnosti (na obrázku galerie s 10 místnostmi):



Takovou galerii lze vždy rozdělit na sadu obdélníků, které se navzájem nepřekrývají. Toto provedení je užitečné, protože umístíte-li dohlížitele do průchodu mezi dvěma místnostmi, pak může sledovat obě najednou, nikdo však nemůže střežit 3 či víc místností současně. Proto pro tyto případy platí, že počet strážců, který bude vždycky stačit (a někdy bude i nutný), bude roven celé části čísla 1/2 × (počet místností + 1). U galerie na obrázku je tedy potřeba 5 hlídačů. Toto je jedno z úspornějších řešení. Matematici v minulosti zkoumali všechny možné scénáře, které se mohou vyskytnout v praxi. V některých z nich se strážci pohybují, v jiných mají zase jen omezené zorné pole nebo jim naopak pomáhá soustava zrcadel, takže vidí i za některé rohy. Existují také studie zkoumající optimální dráhu, po níž se mají pohybovat hypotetičtí zloději v galerii prošpikované kamerami či hlídané pohybujícími se strážci. Až se tedy jednoho dne rozhodnete ukrást *Monu Lisu*, nebude na škodu dopřát si trochu matematiky.

3
Poměry stran z různých pohledů

Až znepokojivě velká část populace tráví značnou část dne u televize nebo u obrazovky počítače. Za nějakých padesát let se v učených časopisech jistě objeví spousta článků o škodlivých účincích, jež napáchala na lidském zraku počítačová revoluce, při níž se tolik nedbalo na „zdraví a bezpečnost".

Během posledního dvacetiletí se u displejů a obrazovek používaných v počítačovém průmyslu ustálily určité formáty a velikosti. „Velikost" obrazovky se stejně jako na počátku televizního věku udává jako délka úhlopříčky mezi protilehlým horním a dolním rohem. Formát je definován jako „poměr stran", tedy jako poměr šířky obrazovky k její výšce. V počítačovém průmyslu se nejčastěji používají tři nebo čtyři formáty. Před rokem 2003 měla většina monitorů formát čtyři ku třem. Jestliže tedy monitor měl šířku čtyři jednotky a výšku tři jednotky, pak podle Pythagorovy věty víme, že druhá mocnina délky jeho úhlopříčky je rovna součtu druhých mocnin jeho délky (16) a výšky (9), což je 25, neboli pět na druhou. Úhlopříčka tedy musí mít délku pět jednotek. Obrazovky tohoto téměř čtvercového tvaru se ve starší televizní éře staly normou i pro monitory stolních počítačů. Tu a tam se mohl člověk setkat s poměrem stran 5 : 4, ale nejběžněji se do roku 2003 užíval poměr 4 : 3.

V letech 2003 až 2006 se v tomto odvětví ujal kancelářský standard 16 ku 10, což je formát, který už se tolik neblíží čtverci a je více roztažený do šířky. Tento poměr se téměř sho-

duje s proslulým poměrem zlatého řezu 1,618, což nejspíš není žádná náhoda. O tomto poměru umělci a architekti často tvrdí, že je esteticky příjemný pro oko, a tak již celá staletí nachází značné uplatnění ve výtvarném umění a designu. Matematici znají jeho zvláštní charakter již od Eukleidových dob. Povíme si o něm více v následujících kapitolách, ale nyní nám stačí vědět toto: o dvou hodnotách A a B říkáme, že jsou v poměru zlatého řezu R tehdy, když

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} = R.$$

Když podíl rozepíšeme, vidíme, že $R = 1 + B/A = 1 + 1/R$, a tedy

$$R^2 - R - 1 = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice je iracionální číslo $R = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1{,}618$.

Poměr zlatého řezu R se používal u notebooků první generace a poté i u samostatných monitorů, které lze připojit k libovolnému stolnímu počítači. Do roku 2010 však vývoj v této oblasti nabral další obrátky a přišel další evoluční posun – i když možná jen nahodilý – k poměru stran 16 ku 9. Obě tato čísla – druhé mocniny čtyř a tří – mají sympatický pythagorejský charakter. Obrazovka s šířkou 16 jednotek a výškou 9 jednotek bude mít úhlopříčku, jejíž délka je druhou odmocninou z čísla 256 + 81 = 337, což je přibližně 18,36 (už ne tak úhledné číslo). Mezi lety 2008 a 2010 měly téměř všechny počítačové obrazovky poměr stran 16 ku 10 nebo 16 ku 9, ale do roku 2010 téměř všichni výrobci přešli od poměru zlatého řezu k poměru 16 ku 9, což je nejlepší kompromis s ohledem na sledování filmů na počítači. Ale uživatel zde nejspíš zase jednou přijde zkrátka, protože když porovnáme dvě obrazovky se stejnou délkou úhlopříčky, dostaneme při poměru stran 4 : 3 větší plochu

displeje než při novějším poměru stran 16 : 9 – obrazovka s úhlopříčkou 28 palců a poměrem stran 4 : 3 bude mít zobrazovací plochu 250 čtverečních palců, zatímco osmadvacetipalcová obrazovka s poměrem stran 16 : 9 má plochu jen 226 čtverečních palců.[1] Výrobci a prodejci, jejichž snahou je přimět nás k výměně počítačového vybavení co nejčastěji, před námi zákazníky o těchto věcech taktně mlčí. Pořídit si nové vybavení může zkrátka někdy znamenat pohoršit si.

4
Vickreyovy aukce

Aukce výtvarných děl nebo nemovitostí bývají otevřené v tom smyslu, že účastníci slyší vyvolávané nabídky ostatních dražitelů nebo jejich agentů. Draženou položku získává dražitel, který nabídl nejvyšší cenu, a musí nabídnutou částku také zaplatit. Jedná se o typ aukce „zaplať, kolik jsi nabídl", který se obvykle označuje jako „anglická aukce".

Díky prodejcům drobných předmětů, jako jsou známky, mince nebo dokumenty, se na začátku 20. století značně rozšířil jiný typ aukce využívající takzvanou „obálkovou metodu", který lze provozovat poštou (dnes i po internetu) a který vyjde mnohem levněji, protože nemusí být řízen licencovaným dražitelem. Zájemci do stanoveného data odešlou nezveřejněnou částku, kterou jsou ochotni za draženou položku zaplatit. Aukci vyhrává účastník, který nabídl nejvyšší částku, ale za vydražený předmět zaplatí cenu, kterou nabídl zájemce s druhou nejvyšší cenou. Tento typ aukce s utajenými nabídkami se nazývá Vickreyova aukce – na počest amerického ekonoma Williama Vickreye, který v roce 1961 studoval zákonitosti tohoto i jiných typů aukcí.[1] Je jisté, že Vickrey tento typ aukce nevynalezl – poprvé byla tato metoda užita při prodeji poštovních známek sběratelům a obchodníkům v roce 1893, kdy různé aukce začaly přitahovat zájem dražitelů na obou stranách Atlantiku a nebylo prakticky uskutečnitelné cestovat přes oceán kvůli osobní účasti na jednotlivých aukcích. V dnešní době na tomto

principu fungují internetové aukční portály, jako například eBay (ačkoli zrovna na eBay ještě navíc platí pravidlo, že vyšší nabídka musí překonat předchozí nabídku o určitou minimální částku).

Obvyklý princip „zaplať, kolik jsi nabídl“, který je tak populární u dražeb v aukčních síních, naráží u obálkové metody na problémy. Pokud každý, kdo odesílá neveřejnou nabídku, má za to, že jedině on zná skutečnou hodnotu prodávané položky, pak bude každá nabídka pravděpodobně nižší než skutečná hodnota předmětu a prodávající přijde zkrátka. Kupující, který předkládá nabídku ceny za předmět, jako je například nemovitost, jejíž hodnotu nelze předem dost dobře zjistit, má pocit, že je tlačen k přeplácení, a může skončit zbytečným vynaložením o hodně vyšší částky, než by stačilo k výhře v otevřené aukci. Někteří kupující také nechtějí licitátorovi při obálkové metodě zasílat vysoké nabídky kvůli obavě, že tím prodejci poskytnou důležitou informaci. Pokud si například ve smíšeném souboru dražených předmětů všimnete jedné obzvláště cenné položky, pak zasláním vysoké nabídky můžete nechtěně způsobit, že prodávající něco zavětří, dojde mu, co jste viděli, a stáhne inkriminovanou položku z prodeje.

Shrnuto, aukce typu „zaplať, kolik jsi nabídl“ obálkovou metodou tedy lidi nemotivuje k tomu, aby dražené předměty prodávali a kupovali za cenu co nejbližší skutečné hodnotě. K tomu je Vickreyova aukce mnohem vhodnější. Optimální strategií při Vickreyově aukci je nabídnout právě takovou cenu, jakou podle vašeho názoru dražená položka skutečně má. Abychom si to ozřejmili, představme si, že skutečnou hodnotu předmětu odhadnete na S, nabídnete za něj částku N, zatímco nejvyšší nabídka od všech ostatních dražitelů bude mít hodnotu O. Je-li O větší než S, pak byste měli učinit nabídku nižší nebo rovnou S, aby nemohlo dojít

k tomu, že položku koupíte zbytečně draze. Pokud je však *O* menší než *S*, měli byste nabídnout částku rovnou *S*. Když nabídnete méně, položku nejen nezískáte levněji (zaplatíte za ni pořád částku *O*, totiž hodnotu druhé nejvyšší nabídky), ale ještě navíc můžete prohrát s jiným zájemcem. Optimální strategií je tedy nabízet částku rovnou skutečné hodnotě dražené položky, tedy *S*.

5

Falešně dokonalá intonace

Dokonalá intonace a nasazování tónů působí u některých zpěváků populární hudby často podezřele, zvlášť když jde o amatérské pěvce v talentových soutěžích. Když si poslechneme obdobné soutěže z dřívějších dob, nikde takovou míru dokonalosti nenajdeme. Naše podezření jsou oprávněná. Používají se totiž určité matematické triky, které vyčistí a vylepší zpěvákův výkon, takže i falešný projev zní dokonale a má přesnou intonaci.

V roce 1996 se Andy Hildebrand rozhodl využít své znalosti z oblasti zpracování signálu při hledání ložisek ropy. Zkoumal odrazy seismických signálů odesílaných pod zem s cílem zmapovat rozložení hornin a ropy. Následně se rozhodl využít své akustické znalosti ke zkoumání korelací mezi různými hudebními zvuky a vytvořit automatický intervenční systém k odstraňování nebo úpravě zvuků, které neznějí čistě nebo jsou jinak nelibozvučné. Podle všeho k tomu došlo poté, co se rozhodl skončit s hledáním ložisek ropy a přemýšlel, do čeho se pustí dál. Jednoho dne pořádal večeři pro pár přátel a jedna účastnice ho vybídla, zda by jí nepomohl najít způsob, jak zpívat čistě. A to se mu povedlo.

Hildebrandův program automatického dolaďování tónů zpočátku využívalo jen několik málo nahrávacích studií, ale postupně se stal v hudební branži standardem. V současné době jej lze jako efekt připojit k mikrofonu, kde dokáže

v reálném čase rozpoznávat a opravovat nečisté tóny a výkyvy v ladění. Automaticky dolaďuje výstup, takže bez ohledu na kvalitu vstupu zní vždy čistě. Hildebranda tento vývoj velmi překvapil. Původně totiž očekával, že program bude schopen tu a tam opravit občasný neladící tón, a ne že bude průběžně zpracovávat celé vystoupení. Zpěváci postupně začali považovat za samozřejmé, že jejich nahrávky se zpracovávají pomocí automatického dolaďovacího efektu. To mělo samozřejmě vliv na homogenizaci hudební produkce, což je vidět zejména v případech, kdy stejnou skladbu nazpívají různí interpreti. Zpočátku byl tento software drahý, ale během let začaly být dostupné i levnější verze pro domácí použití a pro milovníky karaoke, a nyní je jeho vliv všudypřítomný.

Většina posluchačů, kteří nejsou přímo z hudební branže, se s tímto fenoménem nejspíše poprvé setkala, když se v populární televizní soutěži mladých talentů *X Faktor* strhl povyk kvůli tomu, že výkony soutěžících se vylepšovaly právě automatickým dolaďováním. Po protestech se použití tohoto zařízení v soutěži zakázalo a zpěváci nyní čelí mnohem náročnějšímu úkolu, jaký skýtá skutečný zpěv naživo.

Automatický dolaďovací program nejenže dolaďuje frekvenci tónů zpěváka na nejbližší půltón (tedy na tón některé klávesy na klavíru), ale musí provést i další úpravy. Frekvence tónu je totiž rovna podílu rychlosti vlnění a vlnové délky, takže při změně frekvence tónu se změní také odpovídající rychlost vlnění a délka tónu. Bez úpravy by hudba zněla, jako kdyby ji někdo neustále zpomaloval a zrychloval. Hildebrandův trik spočívá v tom, že hudební obsah se digitalizuje, rozdělí se do nespojitých sekvencí zvukových signálů a po úpravě frekvence a rekonstrukci vyčištěného hudebního signálu se upraví i doba trvání vlnění, aby vše znělo, jak má.

Celý proces je poměrně komplikovaný a je založen na matematické metodě označované jako Fourierova analýza.

Tato metoda umožňuje rozložit jakýkoli signál na součet různých sinusových vln. Dá se to popsat, jako by tyto jednoduché vlny byly základními stavebními bloky, z nichž lze složit libovolně složitý signál. Rozklad komplexního hudebního signálu na součet vln (stavebních bloků) s různými frekvencemi a amplitudami umožňuje velmi rychle provádět korekci výšky a kompenzaci délek tónů, takže posluchač nemá šanci cokoli postřehnout. Tedy samozřejmě za předpokladu, že mu není podezřelé, že dotyčný jedinec zpívá až příliš dokonale.

6
Taneční skok „grand jeté“

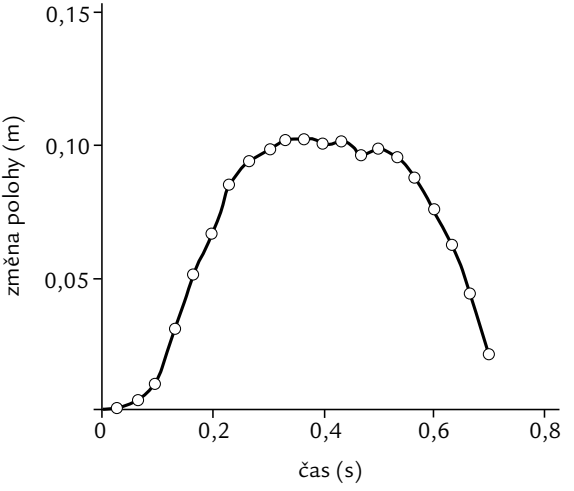
Při sledování baletu se divákovi může někdy zdát, že baleríny popírají gravitaci a při skocích se na chvíli nehybně „zavěsí“ do vzduchu. Samozřejmě, že ve skutečnosti gravitaci popřít nemohou. Jsou tedy všechny ty výrazy typu „zavěšení se do vzduchu“ pouhou nadsázkou nekriticky nadšených obdivovatelů a komentátorů?

Skeptici naopak tvrdí, že pokud je těleso – v tomto případě lidské tělo – vymrštěno ze země, musí se jeho těžiště (nacházející se přibližně v 55 % jeho výšky[1]) pohybovat po parabolické dráze a žádná akce milého tělesa na tom nemůže nic změnit. Když ale budeme v zákonech mechaniky číst šikovně mezi řádky, uvědomíme si, že po parabolické dráze se musí pohybovat pouze těžiště tělesa. Pokud budete mávat pažemi nebo skrčíte kolena k břichu, můžete rozložení částí těla vzhledem k těžišti změnit. Když vyhodíte do vzduchu nesymetrický předmět, například šroubovák, můžete pozorovat, že jeden jeho konec ve vzduchu opisuje značně složitou zpětnou smyčku. Těžiště šroubováku se však bez ohledu na to bude pohybovat po staré známé parabolické dráze.

Nyní už začínáme chápat, co dokáže se svým tělem hráč basketbalu. Jeho těžiště se pohybuje po parabolické dráze, hlava však nemusí. Pohyby těla může dosáhnout toho, že hlava na své dráze zůstane ve stejné výšce co nejdelší dobu (až půl sekundy). Když sledujeme jeho skok, sledujeme pouze

hlavu, a nevšímáme si těžiště. Hlava Michaela Jordana se skutečně po určitou krátkou dobu pohybuje po vodorovné trajektorii. Není to iluze a nejedná se o porušení fyzikálních zákonů. Tento trik můžeme v ladnějším provedení vidět také v baletu, když balerína při velkolepém skoku s názvem grand jeté vyskočí do vzduchu a zcela roznoží. Snaží se dosáhnout iluze vznášení se ve vzduchu z estetických důvodů. Ve fázi výskoku vykopne nohy do vodorovné polohy a paže zvedne nad úroveň ramen. Tím zvýší polohu svého těžiště vzhledem k hlavě. Záhy poté nechá při pádu na podložku klesat nohy i paže, takže klesá i její těžiště vzhledem k hlavě. Ovšem pohyb baletčiny hlavy během výskoku vnímáme jako vodorovný, protože těžiště ve fázi výskoku putuje jejím tělem vzhůru. Po celou dobu se pohybuje po očekávané parabolické dráze, avšak hlava zůstává ve stejné výšce nad podlahou přibližně po 0,4 s, a tím vytváří nádhernou iluzi vznášení se.[2]

Fyzici při pokusech sledovali pohyby tanečnic za pomoci senzorů. Na následujícím obrázku je vidět průběžná změna



polohy hlavy tanečnice vzhledem k jevišti během skoku. V prostřední fázi skoku vidíme v grafu velmi zřetelnou „náhorní plošinu“ s téměř vodorovným úsekem, který odpovídá iluzi vznášení se ve vzduchu a odlišuje se od parabolické dráhy, po níž se pohybuje těžiště.

7

Na co byste neměli věřit

Je opravdu možné, aby nějaká víra byla nemožná? Nemáme zde na mysli jen obyčejně pomýlenou víru, ale takovou, která není možná v logickém smyslu slova. Filozof Bertrand Russell vytvořil slavný logický paradox, který měl dalekosáhlé důsledky pro matematiky, kteří se pokoušejí ukázat, že matematika není nic jiného než logika: soubor všech tvrzení neboli vět, které lze odvodit z určitého souboru počátečních předpokladů, zvaných „axiomy". Russell nás seznámil s pojmem množiny všech množin. Pokud si například množiny představíme jako knihy, lze katalog knihovny považovat za množinu všech množin. Samotný tento katalog může být také knihou, a tudíž bude zároveň prvkem množiny všech knih, ale není to nutné – mohlo by se také jednat o CD nebo o kolekci kartotéčních lístků.

Russell po nás nyní žádá, abychom si představili množinu všech množin, které *nejsou* prvkem sebe sama. To zní trochu krkolomně, ale vypadá to nevinně – dokud se na celou věc nepodíváme zblízka. Předpokládejme, že jste prvkem uvedené množiny – potom ale podle definice jejím prvkem nejste. A pokud naopak jejím prvkem nejste, tak se snadno vyvodí, že jím ve skutečnosti jste! Konkrétněji vzato po nás Russell chce, abychom si představili holiče, který holí všechny lidi, kteří se sami neholí: ale kdo potom holí holiče?[1] A právě tohle je proslulý Russellův paradox.

Logické paradoxy tohoto druhu lze rozšířit na situace,

v nichž se vyskytují dva účastníci, kteří se jeden o druhém něco domnívají nebo něco předpokládají. Předpokládejme, že účastníci se jmenují Alice a Bob. Představme si, že:

Alice si myslí, že Bob má za to, že ona (Alice) si myslí, že Bobova domněnka je mylná.

Tento názor je nemožné zastávat. Protože pokud by si Alice myslela, že Bobova domněnka je mylná, pak by si vlastně zároveň myslela, že Bobova domněnka – tedy že „Alice si myslí, že Bobova domněnka je mylná" – je správná. To znamená, že Alice si nemyslí, že Bobova domněnka je mylná, což odporuje předpokladu, který Alice udělala na počátku. Jediná další možnost je, že Alice si nemyslí, že Bobova domněnka – tedy že „Alice si myslí, že Bobova domněnka je mylná" – je mylná. To ovšem znamená, že Alice si myslí, že Bobova domněnka – tedy že „Alice si myslí, že Bobova domněnka je mylná" – je správná. Ale i zde dojdeme ke sporu, protože z toho zároveň vyplývá, že Alice si myslí, že Bobova domněnka je mylná!

Tak jsme ukázali názor, který není možné logicky zastávat. Ukazuje se, že tato logická šaráda má dalekosáhlé důsledky. Vyplývá z ní, že pokud jazyk, který používáme, obsahuje prostou logiku, pak v něm musí vždy existovat tvrzení, jejichž logickou konzistenci nelze nijak zajistit. V uváděných situacích, v nichž si Alice a Bob jeden o druhém něco myslí, to znamená, že vždy musí existovat určitá domněnka, kterou můžete v daném jazyce o druhé osobě (nebo možná o nějaké božské entitě?) tvrdit, aniž by ji bylo možné konzistentně zastávat.[2] Uživatelé jazyka mohou o těchto logicky nemožných názorech přemýšlet a mluvit, ale nemohou je zastávat.

Stejné dilema vyvstane také v některých soudních případech, kdy porotci musejí posuzovat pravděpodobnost urči-

tých závěrů, které mohou být podmíněně závislé na dalších informacích. Tak se může stát, že vynesou rozhodnutí o vině, které je při předložených důkazech o pravděpodobnosti předpokládaných jevů logicky nemožné. Pokusy o nápravu tohoto problému zavedením výukových kurzů o základních principech podmíněné pravděpodobnosti jsou v britském právním systému tvrdošíjně odmítány, ačkoli v USA se osvědčily.

8

Xerografie: jedno déjà vu za druhým

Před nástupem počítačů si učitelé, univerzitní lektoři a profesoři často zoufali, že místo studia se dnes už jen kopíruje. Kdo ale udělal první fotokopii a uvedl do pohybu tohoto molocha, který až dosud spotřebovává každý den neuvěřitelné množství papíru?

Viníkem je americký právník a amatérský vynálezce Chester Carlson.[1] I když roku 1930 vystudoval fyziku na kalifornské technice, nemohl najít stálou práci a jeho rodiče pro chronické nemoci přišli na mizinu. Velká hospodářská krize se prohlubovala a Carlson musel vzít zavděk jakýmkoli zaměstnáním, které mohl dostat. Nakonec se uplatnil v patentovém oddělení Malloryho společnosti pro výrobu baterií. Ve snaze co nejlépe využít příležitosti navštěvoval večerní školu pro právníky a po promoci se stal manažerem celého oddělení, a tehdy mu začalo vadit, že nikdy nebyl dostatek kopií patentových dokumentů pro všechny organizace, které je potřebovaly. Mohl je nanejvýš dát ofotografovat – což bylo drahé – nebo je přepsat ručně, což bylo zase nepříjemné, protože měl slabý zrak a trpěl bolestivou artritidou. Musel hledat levnější a pohodlnější způsob, jak vytvořit kopie.

Nebylo to nic lehkého. Carlson strávil větší část roku hledáním vhodných fotografických technik, dokud při pátrání v knihovně nenarazil na novou vlastnost „fotovodivosti“, kterou nedlouho předtím objevil maďarský fyzik Paul Selényi. Zjistil, že když světlo dopadne na povrch jistých látek,

vzrůstá jejich elektrická vodivost neboli tok elektronů. Carlson si uvědomil, že když je fotografie či stránka textu osvícena tak, že se stane fotovodivou plochou, pak elektrický proud poteče ve světlých oblastech, ale nikoli v oblastech tmavě potištěných, a mohla by tak vzniknout elektrická kopie. Zařídil si provizorní domácí elektronickou laboratoř v kuchyni svého bytu na Jackson Heights v newyorské čtvrti Queens a v noci experimentoval s různými technikami pro získání duplikátu obrazu na papíře.[2] Když ho manželka vykázala z kuchyně, přesunula se jeho laboratoř do salónu krásy v blízkosti Astorie, který mu propůjčila tchyně. Tam také 22. října 1938 vznikla první úspěšná kopie.

Carlson vzal zinkovou desku potaženou tenkou vrstvou sírového prášku a zapsal černým inkoustem na podložní sklíčko mikroskopu datum a místo „10–22–38 ASTORIA". Ztlumil světla, nabil sírovou vrstvu tím, že ji chvíli třel kapesníkem (podobně jako se nabije plastový míč třením o vlněný svetr), umístil na ni destičku a po několik sekund ji osvěcoval ostrým světlem. Poté sklíčko opatrně sejmul a poprášil plochu lykopodiovým práškem. Po odfouknutí prášku se objevil duplikát zprávy. Obraz zafixoval zahřátým voskovaným papírem tak, aby chladnoucí vosk zatuhl kolem míst, kde se uchytil prášek.

Carlson nazval svou novou techniku „elektrofotografií" a snažil se ji nabídnout několika velkým korporacím včetně IBM a General Electric, protože na další výzkum a vývoj neměl peníze. V žádné z nich však neprojevili sebemenší zájem. Jeho vybavení bylo těžkopádné a pracovní proces složitý a poněkud chaotický. Všichni si říkali, že průklepové a uhlové papíry bohatě stačí.

Teprve v roce 1944 vyšel Battelle Research Institute ve městě Columbus v Ohiu Carlsonovi vstříc a uzavřel s ním smlouvu, která zahrnovala vylepšení jeho hrubého postupu

tak, aby se dal komerčně využít.[3] O tři roky později od nich odkoupila všechna práva ke Carlsonově vynálezu společnost Haloid Company, která v Rochesteru vyráběla fotografické papíry, a začala plánovat tržní využití kopírovacích zařízení. První změnou, kterou s Carlsonovým souhlasem provedli, bylo nahrazení nešikovného názvu „elektrofotografie" termínem „xerografie", který navrhl jistý profesor klasických jazyků ze Státní univerzity v Ohiu. Původ slova je řecký, znamená to „suché psaní". Roku 1948 začala Haloid Company používat zkrácenou obchodní značku „Xerox". Xeroxové stroje brzy slavily obchodní úspěchy, což se roku 1958 projevilo přejmenováním firmy na Haloid Xerox Inc. Nový stroj Xerox 914 z roku 1961 užíval jako první běžného papíru a byl tak velkým úspěchem, že firma z názvu zcela vypustila „Haloid" a přijala jméno Xerox Corporation. Tržby činily toho roku 60 milionů dolarů a do roku 1965 dosáhly 500 milionů ročně. Carlson pohádkově zbohatl, pravidelně však dával dvě třetiny svého zisku na charitativní účely. Jeho první fotokopie zahájily nepředstavitelnou proměnu v pracovních zvyklostech na celém světě. Přenos informace už nikdy nebude jako dříve: obrazy i slova se dnes kopírují zcela běžně.

9
Za stránky krásnější

Všeobecné rozšíření jednoduchých, cenově dostupných počítačů a tiskáren přineslo revoluční změnu našich možností vytvářet atraktivně vyhlížející dokumenty. Stisknutím pár kláves či kliknutím myší můžeme kromě provádění změn v dokumentu upravit také použité písmo, řádkování, okraje, velikost znaků, barvy nebo rozložení prvků na stránce, zobrazit náhled dokumentu a poté jej vytisknout na mnoho různých médií. Pokaždé získáme zcela novou, čistou kopii. Vše se odehrává tak snadno, že jsme již zapomněli (nebo jsme příliš mladí na to, abychom ji mohli znát) na veškerou námahu při typografické úpravě dokumentů a sazbě knih před počítačovou érou.

Snaha o vytváření stránek textu, které esteticky lahodí oku, tu byla od nejranějších dob. Klíčovým zřetelem pro kaligrafy a tiskaře v pogutenbergovské éře je formát stránky: poměr plochy celé stránky k popsané ploše a velikost každého ze čtyř okrajů. Tyto proporce je nutné dobře zvolit, aby vytvořily vizuálně přitažlivou grafickou úpravu. V raných dobách se vyžadovalo, aby tyto rozměry odrážely speciální pythagorejské harmonické poměry, což zároveň usnadňovalo řešení čistě praktického problému, jak zvolené hodnoty jednoduše implementovat.

Předpokládejme, že poměr šířky (Š) a výšky (V) strany papíru je 1 : R, kde R bude pro orientaci „na výšku“ větší než 1, zatímco pro orientaci „na šířku“ menší než 1. Existuje

elegantní geometrická konstrukce, pomocí níž lze vytvořit grafickou úpravu textu na této stránce tak, že vniTřní (T), Horní (H), vněJší (J) a Dolní (D) okraje budou mít následující poměry:

$$T : H : J : D = 1 : R : 2 : 2R.$$

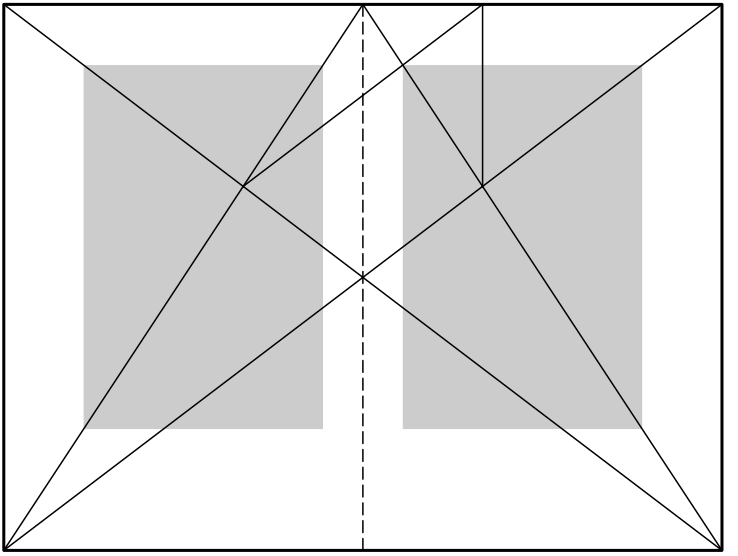
Povšimněte si, že proporce celé strany (výška/šířka = R) jsou stejné jako proporce plochy textu, protože:

$$\frac{\text{výška textu}}{\text{šířka textu}} = \frac{V - H - D}{Š - J - T} = \\ = \frac{RŠ - R - 2R}{Š - 2 - 1} = R.$$

Předpis (neboli „kánon“) pro rozvržení a grafickou úpravu stránek[1] s těmito proporcemi ve středověku nejspíš patřil k cechovním tajemstvím. Volba konkrétní hodnoty proměnné R pro velikost papíru se řídila různými tradicemi. Jedním z oblíbených poměrů výšky k šířce papíru byl poměr 3 : 2, tedy $R = 3/2$. Koeficienty čtyř okrajů stránky se poté vypočetly v poměru $T : H : J : D = 1 : 3/2 : 2 : 3$. Konkrétněji to znamená, že pokud šířka vnitřního okraje bude 2, bude mít horní okraj šířku $3/2 \times 2 = 3$, vnější okraj $2 \times 2 = 4$ a dolní okraj bude $2 \times 3 = 6$.

Na obrázku dále je uveden jednoduchý předpis pro toto dobře vyvážené rozložení dvojstránky, kde jsou oba listy papíru položeny těsně vedle sebe.[2] Byly navrženy podobné předpisy, které využívají jednoduché konstrukce známé a využívané ve středověku.[3] Zde je dobře vidět, jak přímočaře mohli členové písařské dílny vytvořit rozložení své stránky pouze pomocí pravítka.

Nejprve se nakreslí úhlopříčky spojující pravý a levý dolní roh vždy s protějším horním rohem na téže stránce a pak také s protějším horním rohem na vedlejší stránce. Z prů-



sečíku úhlopříček na pravé stránce vedeme svislou čáru směrem k hornímu okraji stránky. Bod, kde tato svislice protne horní okraj pravé stránky, nyní spojíme s průsečíkem úhlopříček na levé stránce. Poznamenáme si bod, kde tato úsečka protne úhlopříčku mezi levým horním rohem pravé stránky a pravým dolním rohem téže stránky. Tento průsečík vyznačuje vzdálenost mezi horním okrajem textu a horním okrajem stránky. Čtyři body, v nichž tento vodorovný okraj protíná čtyři úhlopříčky, určují horní rohy plochy textu na obou stránkách dvoustrany. Průsečík zároveň vyznačuje i vnitřní okraj stránky. Spustíme-li svislici z bodu určujícího vnější okraj, získáme v místě průsečíku s úhlopříčkou dolní roh plochy textu. Obrázek znázorňuje postup při rýsování uvedených šesti úseček, které jsou třeba k vytvoření rozvržení $R = 3/2$, což v tomto případě dává hodnoty T a J rovné 1/9 a 2/9 šířky stránky a hodnoty H a D rovné 1/9 a 2/9 výšky stránky. Výsledná potištěná plo-

cha pak tvoří 4/9 z plochy celé stránky.[4] Tyto principy mají i nadále co říci v moderní grafické úpravě knih,[5] přestože máme k dispozici komplexnější možnosti a automatické řízení návrhu pomocí počítače.

10
Zvuk ticha

Dne 6. března roku 2012 jsem měl možnost společně s Ludovicem Einaudim přednést v koncertním sále Parco della Musica v Římě přednášku s názvem *La Musica del Vuoto* (Hudba prázdnoty). Hovořil jsem o historickém i soudobém pojmu vakua (ono *vuoto* v názvu přednášky) ve vědě i v hudbě a o pojmu nula v matematice; Ludovico Einaudi přednesl klavírní skladby, na nichž je dobře vidět vliv ticha a také správného načasování při komponování a interpretaci hudby.

Žádná přednáška či konverzace, která se zabývá pojmem „nic" a hudbou, nemůže opominout proslulou skladbu 4′33″ („Čtyři minuty, třicet tři sekundy") Johna Cage, a Einaudi měl příležitost toto dílo přednést před římským publikem vůbec poprvé. Skladba byla zkomponována v roce 1952 – v partituře se praví „pro libovolný nástroj nebo kombinaci nástrojů" – a sestává ze čtyř minut a třiatřiceti sekund ticha ve třech větách. Podle Cageova předpisu lze délky jednotlivých vět zvolit libovolně. Při prvním „provedení" skladby klavíristou Davidem Tudorem v srpnu roku 1952 ve Woodstocku v americkém státě New York měly věty délky 33″, 2′40″ a 1′20″.

Podle Cageových pokynů ke skladbě seděl Einaudi během každé věty nehybně nad klavírem s rukama položenýma na klávesách a na konci každé věty vždy zavřel víko klaviatury, aby je při začátku další opět otevřel. Můj výtisk původní

partitury má prostou podobu:

I

TACET

II

TACET

III

TACET

Pokyn „tacet“ (být zticha) se v hudebním zápisu obvykle používá k určení, že určitý nástroj během daného úseku skladby nehraje – zde je však stanoveno, že v žádné větě nehraje *nikdo nic*!

Během ticha v délce 4′33″ bylo velmi zajímavé sledovat reakce publika. Je nemožné vytvořit dokonalé ticho, a tak byl slyšet neustálý šum, způsobený vrtěním, ošíváním se a občasným zakašláním či šepotem. Po více než minutě však zvukové vpády nabíraly na naléhavosti, protože někteří lidé v publiku se začali chichotat a podléhat záchvatům smíchu, které postupně zesilovaly a začaly se šířit. Je možné, že Cageova lekce splnila účel právě tím, že jsme si uvědomili, jak bídně jsme schopni naplnit požadavek ticha.

Po určitém přemítání je potřeba důvody tohoto selhání trochu vysvětlit. Každopádně lze říci, že opravdového ticha se dosahuje velmi těžce a že je vždy bude rušit nějaký hluk prostředí, ale zároveň se tichu dokážeme mnohem lépe přiblížit při mnoha jiných příležitostech. Schválně se zkuste posadit do místnosti, kde probíhají zkoušky, navštivte trapistický klášter anebo zádušní mši v kostele – zakusíte něco mnohem bližšího opravdovému tichu, než čeho lze dosáhnout při tomto hudebním díle. Proč? Podle mého soudu spočívá správná odpověď v tom, že Cage se snažil naordinovat ticho bez jakéhokoli důvodu a účelu. Jeho dílo nezapuzuje hluk s cílem absolutního soustředění na něco

jiného. Jakmile toto soustředění chybí, mysl volně bloumá a ticho se nedaří zjednat.

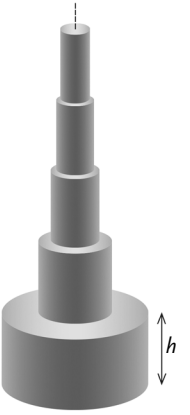
A konečně, jakou má Cageova kompozice spojitost s vědou? Může zde být vůbec nějaká? Podívejme se znovu na neobvyklou předepsanou délku ticha, podle níž se skladba jmenuje. Dobu 4′33″ můžeme vyjádřit jako 273 sekund, což je číslo, které každému fyzikovi rezonuje zvláštním významem. Absolutní nula pro teplotu totiž nastává při –273 °C. Při této teplotě ustává veškerý molekulární pohyb a žádnou akcí již nelze teplotu dále snížit. Cageova kompozice se snaží definovat absolutní nulu pro hladinu zvuku.

11

Velmi neobvyklý dort

Vyrobit vícepatrový svatební dort s polevou je docela umění. Jednotlivá patra musejí být úhledně upravená a přitom dostatečně pevná, aby unesla další patra nad sebou. Cukrová poleva může navíc být ozdobena květinami v barvách sladěných s kyticí nevěsty. My se nyní budeme zabývat úkolem upéci velmi zvláštní svatební dort s polevou. Bude mít mnoho vrstev; každá z nich bude mít tvar plného válce s jednotkovou výškou. Jak postupujeme nahoru, od první, k druhé, třetí a tak dále, až k n-té vrstvě, budou se postupně zmenšovat. První bude mít poloměr 1, druhá 1/2, třetí 1/3 – obecně poloměr n-té vrstvy bude $1/n$.

Objem válcové vrstvy o poloměru r a výšce h je přesně $\pi r^2 h$, protože si ji lze představit jako na sebe naskládaný



stoh kruhových kotoučů o celkové výšce h, přičemž plocha každého kotouče je πr^2. Vnější povrchová plocha je rovna plášti válce o výšce h, tvořenému na sebe naskládanými kružnicemi o poloměru $2\pi r$, takže má velikost $2\pi rh$. Z těchto vzorců nám vychází, že n-té patro našeho speciálního dortu bude mít objem $\pi \times (1/n^2) \times 1 = \pi/n^2$ a vnější plocha polevy pláště bude rovna $2\pi \times (1/n) \times 1 = 2\pi/n$. Tyto vzorce udávají objem a povrch samotné n-té vrstvy. Chceme-li vypočítat celková čísla pro celý dort s n patry, musíme sečíst hodnoty objemu a plochy pro všechna patra $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Nyní si představme velmi neobyčejný dort s nekonečným počtem pater. Jeho celkový objem lze vypočítat jako součet objemů nekonečného počtu pater:

$$\text{Celkový objem} = \pi\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \\ = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{6} = 5{,}17.$$

Tento nekonečný součet členů je pozoruhodný tím, že výsledkem je konečné číslo. Velikost následných členů se zmenšuje dostatečně rychle, takže řada konverguje k součtu $\pi^2/6$, což je přibližně 1,64. K vytvoření svatebního dortu s nekonečným počtem pater bychom potřebovali pouze konečné množství dortové hmoty.[1]

Dále je třeba vytvořit polevu dortu. K odhadu potřebného množství je nutné vypočítat celkový povrch vnějšího pláště. (Přitom zanedbáme malou prstencovou plochu o šířce $1/n - 1/(n + 1)$ na vrchní straně každého patra, která je vynechána hořejším patrem bezprostředně nad ním – součet jejich ploch je roven ploše podstavy největší vrstvy a brzy uvidíme, proč na něm nezáleží.) Celková plocha, kterou je třeba pokrýt polevou, je součet povrchu pláště všech pater

na nekonečně-patrovém dortu:

$$\text{Celková vnější plocha} = 2\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \\ = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tento součet je nekonečný. Řada členů $1/n$ neklesá dostatečně rychle, aby konvergovala ke konečnému výsledku. Když do součtu zahrneme dostatečně velký počet členů, můžeme jej učinit libovolně velkým. Snadno to vyplyne z pozorování,[2] že součet této řady musí být větší než součet řady $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \ldots$, kde bude následovat závorka s osmi šestnáctinami a poté závorka se šestnácti dvaatřicetinami. Každý z členů v závorce je tedy roven $\frac{1}{2}$. Těchto závorek zde zjevně bude nekonečný počet, a tak jejich součet bude roven hodnotě 1 plus nekonečný počet polovin, což nám dá nekonečné číslo. Náš hledaný součet je větší než toto číslo, takže musí být také nekonečný: celková plocha našeho nekonečně-patrového dortu bude nekonečná. (Proto jsme se také netrápili připočtením plochy prstenců na vrchní straně jednotlivých pater.)

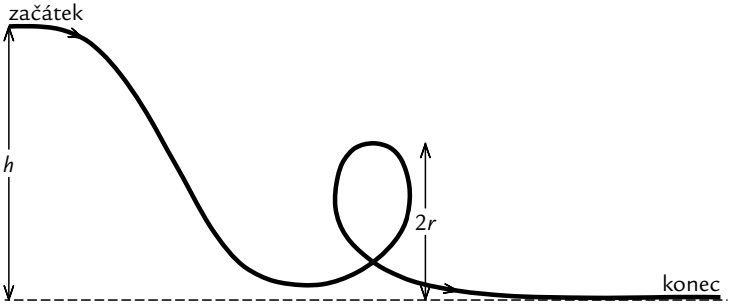
Tento výsledek je velmi překvapivý[3] a jde zcela proti přirozené intuici: recept na náš dort bude vyžadovat konečné množství dortové směsi, ale přitom jej nikdy nebude možné opatřit polevou o pevně dané tloušťce, protože má nekonečně velký povrch!

12

Fyzika horské dráhy

Byli jste někdy na pořádné horské dráze, která důkladně prověří odolnost vašeho žaludku, zaveze vás do smyčky, vzhůru nohama přes vrchol a přímo zpět dolů? Možná byste si mysleli, že zakřivená dráha kolejí opisuje kruhový oblouk. Tak to ale skoro nikdy není, protože aby měl vozík na vrcholu dostatečnou rychlost, a tudíž z něj lidé nevypadli (nebo tam neviseli v bezpečnostních pásech), musela by na ně v nejnižším bodě dráhy působit příliš velká síla.

Podívejme se, co se děje v případě kruhové smyčky o poloměru r a plně obsazeném vozíku o hmotnosti m. Vozík se samovolně rozjede z výšky h (větší než r) nad zemí a pak prudce sjíždí k nejnižšímu bodu smyčky. Zanedbáme-li tření a odpor vzduchu, dosáhne ho při rychlosti $V_b = \sqrt{2gh}$ a pak se pohybuje vzhůru k vrcholu smyčky. Má-li ho dosáhnout při rychlosti V_t, potřebuje energii o hodnotě $2mrg + \frac{1}{2}mV_t^2$, aby překonal gravitaci a ve výšce $2r$, v níž je vrchol smyčky,



měl stále ještě rychlost V_t. Ježto se celková energie nemění, musí platit (hmotnost vozíku m se ve všech členech vykrátí)

$$gh = \tfrac{1}{2}V_b^2 = 2gr + \tfrac{1}{2}V_t^2 \qquad (*)$$

Na vrcholu kruhové smyčky je odstředivá síla, která na pasažéra působí a brání mu vypadnout z vozíku, rovna odstředivé síle pohybu po kružnici o poloměru r, která působí nahoru, minus jeho hmotnost, která ho táhne dolů; je-li hmotnost pasažéra M, pak

$$\text{čistá síla směrem nahoru na vrcholu} = \frac{M(V_t)^2}{r} - Mg.$$

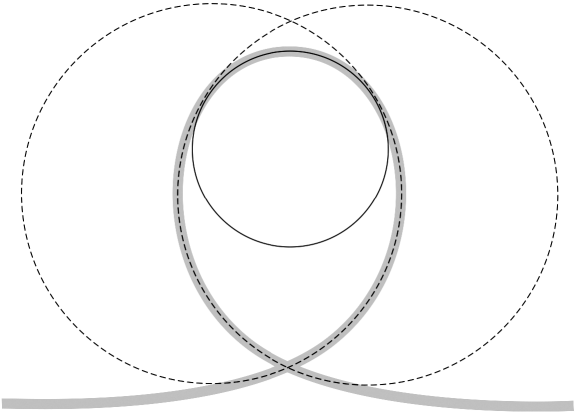
Ta musí být kladná, aby pasažér nevypadl, a tak je nutné, aby $V_t^2 > gr$.

Z předchozích vztahů vyplývá i podmínka $h > 2{,}5r$, pokud se tedy z výchozí polohy rozjíždíte pouze účinkem gravitace, musíte začínat z výšky aspoň 2,5krát větší, než je vrchol smyčky – pouze tak dosáhnete dostatečné rychlosti, abyste nevypadli z vozíku. V tom se však skrývá velký problém. Začnete-li v této výšce, dosáhnete nejnižší polohy rychlostí $V_b = \sqrt{2gh}$ a ta bude větší než $\sqrt{2g \times 2{,}5r} = \sqrt{5gr}$. V dolním bodě kruhové smyčky tak budete vystaveni síle, která se rovná vaší hmotnosti *plus* odstředivé síle pohybu po kružnici, tedy

$$\text{celková síla směrem dolů v nejnižším bodě} = \\ = \frac{Mg + M(V_b)^2}{r} > Mg + 5Mg = 6Mg.$$

V nejnižším bodě dráhy tedy překročí síla, která působí na jezdce směrem dolů, šestinásobek jeho hmotnosti – budete tedy vystaveni přetížení většímu než 6g. Pokud zrovna nejste astronauti na dovolené nebo špičkoví piloti v g-obleku, ztratíte působením takové síly vědomí, protože ustane veškerý

přívod kyslíku do mozku. Lunaparkové dráhy pro děti jsou obvykle postaveny tak, aby nepřekračovaly zrychlení $2g$, a na těch pro dospělé zakusíte nejvýš $4g$.

Horské dráhy s kruhovými smyčkami jsou tedy vzhledem k okolnostem vlastně neprovozovatelné. Podíváme-li se však podrobněji na obě nutné podmínky – že na vrcholu dráhy musí směrem vzhůru působit dostatečná síla, aby člověk z vozíku nevypadl, a že je nutné se vyhnout smrtící síle směrem dolů v nejnižším bodě dráhy – lze tvar horské dráhy upravit tak, aby oběma vyhověl?

Pohybujete-li se po kružnici poloměru R rychlostí V, působí na vás odstředivé zrychlení V^2/R. Čím větší je poloměr, tedy čím méně křivá je kružnice, tím menšímu zrychlení budete vystaveni. Zrychlení V_t^2/r na vrcholu vás chrání před vypadnutím, ježto překonává vaši hmotnost Mg, která vás táhne dolů – toto zrychlení tedy potřebujeme mít velké, což lze řešit i tak, že r na vrcholu bude malé. Naproti tomu v nejnižším bodě kruhové dráhy to je právě odstředivá síla, která vyvolává dodatečné zrychlení $5g$ – od toho si pomůžeme tím, že vozík pojede po dráze s co nejmenším zakřivením, tedy po kružnici o co největším poloměru. Proto je vhodné